

假定某市成年男性的身高服从正态分布，
希望得到平均身高 m ：

- m 的大小如何；
- m 大概落在什么范围内；
- 能否认为某一说法成立（如 $m \leq 1.68$ ）。

第七章 参数估计

- 第一节 点估计
- 第三节 估计量的评选标准
- 第四节 区间估计
- 第五节 正态总体均值与方差的区间估计
- 第六节 $(0-1)$ 分布参数的区间估计
- 第七节 单侧置信区间



第一节 点估计

假定深圳大学学生月生活费用服从 $N(\mu, \sigma^2)$ ，估计 μ 。

估计方案

从中抽取 n 个学生,生活费用分别为 X_1, \dots, X_n ，其平均值 \bar{X} ，

↵

具体实施

从中抽取 n 个学生,生活费用分别为 x_1, \dots, x_n ，平均值为 \bar{x} ，

我们知道, 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu$.

由大数定律,

样本均值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} = 0$$

自然想到把样本均值作为总体均值的一个估计.

点估计问题的一般提法

设总体 X 的分布函数 $F(x; \theta)$ 的形式为已知, θ 是待估参数. X_1, X_2, \dots, X_n 是 X 的一个样本, x_1, x_2, \dots, x_n 为相应的一个样本值.

点估计问题就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 来估计未知参数 θ .

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 称为 θ 的估计量. } 通称估计,
 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 称为 θ 的估计值. } 简记为 $\hat{\theta}$.

点估计涉及的两个问题

- 其一 是如何给出估计，即估计的方法问题；
- 其二 是如何对不同的估计进行评价，即估计的好坏判断标准。

一、矩估计法

- ◆ 用样本矩去替换相应的总体矩
- ◆ 用样本矩的连续函数去替换相应的总体矩的连续函数

通常采用原点矩

例1 设总体 X 服从 $[0, \theta]$ 上的均匀分布,即密度函数

$$f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0 & , \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是一个样本, 求 θ 的矩估计量

练习 设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x, \theta) = \begin{cases} (\theta+1)x^\theta, & 0 < x < 1 \\ 0 & , \text{ 其他} \end{cases}$$

其中 $\theta > -1$ 未知, X_1, X_2, \dots, X_n 是一个样本, 求 θ 的矩估计量

样本矩依概率收敛于相应的总体矩P137

$$A_l = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^l \xrightarrow{p} E(X^l) = \mu_l$$

样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩的连续函数.

$$g(A_1, \cdots, A_k) \xrightarrow{p} g(\mu_1, \cdots, \mu_k)$$

例3 设总体 X 的均值 μ 和方差 σ^2 都存在, 且有 $\sigma^2 > 0$, 但 μ 和 σ^2 均为未知, 又设 X_1, X_2, \dots, X_n 是一个样本, 求 μ 和 σ^2 的矩估计量.

$$\hat{\mu} = A_1 = \bar{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

**总体均值与方差的矩估计量的表达式
不因不同的总体分布而异.**

例2 设总体 X 在 $[a, b]$ 上服从均匀分布, a, b 未知,
又设 X_1, X_2, \dots, X_n 是一个样本,
求 a 和 b 的矩估计量.

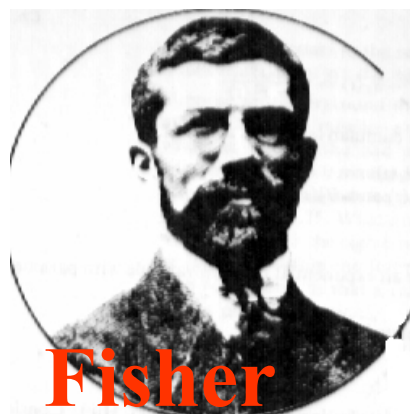
矩估计法的优缺点

- 矩估计法的优点：简单易行，不需要知道总体的分布形式，只需要知道总体若干阶矩的形式；
- 矩估计法的缺点：总体分布形式已知的情形下，矩估计法不能够充分利用总体分布提供的信息。

二、最大似然估计法

它是在总体类型已知条件下使用的一种参数估计方法。

它首先是由德国数学家高斯在1821年提出的。然而,这个方法常归功于英国统计学家费歇。



费歇在1922年重新发现了这一方法，并首先研究了这种方法的一些性质。

A同学和一位猎人一起外出打猎。

一只野兔从前方窜出，只听一声枪响，野兔应声倒地。请推断：是谁开枪？



猎人射击**最有可能**一枪命中野兔。

例6.1.4 设有外形完全相同的两个箱子，甲箱中有 99 个白球和一个黑球，乙箱中有 99 个黑球和一个白球，今随机地抽取一箱，并从中随机抽取一球，结果取得白球，问这球是从哪一个箱子中取出？

看谁最有可能产生观察结果；

或者说，看谁使得观察结果出现的概率最大。

最大似然原理

在参数空间中，

看参数为哪个值时最有可能产生观察结果；

或者，看参数为哪个值使得观察结果出现的概率最大。

设总体 X 的分布函数 $F(x; q)$ 的形式为已知, q 是待估参数.

做了一次试验, 事件 A 发生。

已知 $q=0.1$ 时, $P(A) = 0.8$;

已知 $q=0.2$ 时, $P(A) = 0.98$;

已知 $q=0.3$ 时, $P(A) = 0.5$

(1) 设总体 X 属离散型

设分布律 $P\{X = x\} = p(x; \theta)$, θ 为待估参数, $\theta \in \Theta$,

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本,

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是相应的一个样本值.

观察
结果

则样本 X_1, X_2, \dots, X_n 取到观察值 x_1, x_2, \dots, x_n 的概率,

即事件 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ 发生的概率为

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta), \quad \theta \in \Theta,$$

样本的似然函数

如果 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的最大似然估计值
(Maximum Likelihood Estimate);

称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的最大似然估计量
(Maximum Likelihood Estimator).

例4 设 $X \sim B(1, p)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的一个样本, 求 p 的最大似然估计量.

解 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为相应于样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的一个样本值,

X 的分布律为 $P\{X = x\} = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0, 1$

似然函数
$$L(p) = \prod_{i=1}^n p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$$
$$= p^{\sum_{i=1}^n x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^n x_i},$$

$$\ln L(p) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln p + \left(n - \sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(1-p),$$

$$\text{令 } \frac{d}{dp} \ln L(p) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{p} - \frac{n - \sum_{i=1}^n x_i}{1-p} = 0,$$

$$\text{解得 } p \text{ 的最大似然估计值 } \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$$

$$p \text{ 的最大似然估计量为 } \hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}.$$

例4 设 $X \sim B(1, p)$, X_1, X_2, \dots, X_n 是来自 X 的一个样本, 求 p 的最大似然估计量.

解 设 x_1, x_2, \dots, x_n 为相应于样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的一个样本值,

解得 p 的最大似然估计值 $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x}.$

p 的最大似然估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}.$

例 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布, x_1, x_2, \dots, x_n 为一样本值,求参数 λ 的最大似然估计

解 似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n P(X = x_i) = \prod_{i=1}^n \left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} e^{-\lambda} \right) = \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^n x_i}}{\prod_{i=1}^n (x_i!)} e^{-n\lambda}$$

$$\ln(L(\lambda)) = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \ln(\lambda) - n\lambda - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!)$$

$$\text{令 } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} \ln L(\lambda) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\lambda} - n = 0,$$

解得 λ 的最大似然估计值 $\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{x},$

λ 的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \bar{X}.$

求最大似然估计值的一般步骤:

(一) 写出似然函数

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta)$$

(二) 取对数

$$\ln L(\theta)$$

(三) 对 θ 求导 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta}$, 并令 $\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = 0$,

解方程即得未知参数 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$.

(2) 设总体 X 属连续型

设概率密度为 $f(x; \theta)$, θ 为待估参数, $\theta \in \Theta$,

X_1, X_2, \dots, X_n 是来自总体 X 的样本,

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是相应的一个样本值.

观察
结果

则样本 X_1, X_2, \dots, X_n 取到观察值 x_1, x_2, \dots, x_n 的概率,

即事件 $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ 发生的概率为

0

设 x_1, x_2, \dots, x_n 是相应的一个样本值.

观察
结果

则随机点 (X_1, X_2, \dots, X_n) 落在点 (x_1, x_2, \dots, x_n) 的邻域
(边长分别为 dx_1, dx_2, \dots, dx_n 的 n 维立方体) 内的概率
近似地为

$$\prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) dx_i$$
$$= \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta) \left(\prod_{i=1}^n dx_i \right)$$

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta), \theta \in \Theta,$$

样本的似然函数

如果 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 使得

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 为 θ 的最大似然估计值
(Maximum Likelihood Estimate);

称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为 θ 的最大似然估计量
(Maximum Likelihood Estimator).

例 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是取自总体 X 的一个样本,
设 x_1, x_2, \dots, x_n 是相应的一个样本值.

$$X \sim f(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases} \quad \text{其中 } \theta > 0,$$

求 θ 的最大似然估计值.

解 似然函数为

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^n \theta x_i^{\theta-1} = \theta^n \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{\theta-1}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + (\theta - 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

求导并令其为0

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d \theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^n \ln x_i = 0$$

从中解得

$$\hat{\theta} = -n / \sum_{i=1}^n \ln x_i$$

即为 θ 的最大似然估计值。

最大似然估计法也适用于分布中含有多个未知参数的情况. 此时只需令

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L = 0, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

对数似然
方程组

解出由 k 个方程组成的方程组, 即可得各未知参数 θ_i ($i = 1, 2, \dots, k$) 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i$.

例5 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 为未知参数,
 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自 X 的一个样本值, 求 μ 和 σ^2
的最大似然估计量.

解 X 的概率密度为 $f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$

似然函数为 $L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

$$\ln L(\mu, \sigma^2) = -\frac{n}{2} \ln(2\pi) - \frac{n}{2} \ln \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2,$$

$$\text{令} \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L(\mu, \sigma^2) = 0, \\ \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L(\mu, \sigma^2) = 0, \end{cases}$$

最大似然估计值

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x}, \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \end{cases}$$

最大似然估计量

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X}, \\ \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2. \end{cases}$$

例 设 x_1, x_2, \dots, x_n 是来自均匀总体 $U(0, b)$ 的一个样本, 试求 b 的最大似然估计.

例6 设总体 X 在 $[a, b]$ 上服从均匀分布, 其中 a , b 未知, x_1, x_2, \dots, x_n 是来自总体 X 的一个样本值, 求 a, b 的最大似然估计量.

解 记 $x_{(1)} = \min(x_1, x_2, \dots, x_n)$,
 $x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \dots, x_n)$,

X 的概率密度为

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因为 $a \leq x_1, x_2, \dots, x_n \leq b$ 等价于 $a \leq x_{(1)}, x_{(n)} \leq b$,

作为 a, b 的函数的似然函数为

$$L(a, b) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)^n}, & a \leq x_{(1)}, b \geq x_{(n)} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

于是对于满足条件 $a \leq x_{(1)}, b \geq x_{(n)}$ 的任意 a, b 有

$$L(a, b) = \frac{1}{(b-a)^n} \leq \frac{1}{(x_{(n)} - x_{(1)})^n},$$

即似然函数 $L(a, b)$ 在 $a = x_{(1)}$, $b = x_{(n)}$ 时
取到最大值 $(x_{(n)} - x_{(1)})^{-n}$,

a, b 的最大似然估计值

$$\hat{a} = x_{(1)} = \min_{1 \leq i \leq n} x_i, \quad \hat{b} = x_{(n)} = \max_{1 \leq i \leq n} x_i,$$

a, b 的最大似然估计量

$$\hat{a} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad \hat{b} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i .$$

例5 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, μ, σ^2 为未知参数, x_1, x_2, \dots, x_n 是来自 X 的一个样本值, 求 μ 和 σ^2 的最大似然估计量.

$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 是 σ^2 的最大似然估计;

$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ 是 σ 的最大似然估计?

$\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计,

$u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计?

最大似然估计的不变性:

设 θ 的函数 $u = u(\theta)$, $\theta \in \Theta$ 具有单值反函数 $\theta = \theta(u)$, $u \in U$. 又设 $\hat{\theta}$ 是 X 的概率密度函数 $f(x; \theta)$ (f 形式已知) 中的参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{u} = u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

作业：

■ P173 2; 3

例6 设总体 X 在 $[a, b]$ 上服从均匀分布, 其中 a , b 未知, x_1, x_2, \dots, x_n 是来自总体 X 的一个样本值, 求 a, b 的最大似然估计量.

解 a, b 的最大似然估计量

$$\hat{a} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i, \quad \hat{b} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i .$$

第三节 估计量的评选标准

- (1)对于同一个参数究竟采用哪一个估计量好?
- (2)评价估计量的标准是什么?

(一) 无偏性

若估计量 $\hat{\theta} = \theta(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的数学期望 $E(\hat{\theta})$ 存在, 且对于任意 $\theta \in \Theta$ 有 $E(\hat{\theta}) = \theta$, 则称 $\hat{\theta}$ 是 θ 的无偏估计量.

无偏估计的实际意义: 无系统误差.

例 设总体 X 的均值为 μ , 方差为 σ^2 ,
 X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的随机样本, 记
 \bar{X} 与 S^2 分别为样本均值与样本方差, 即

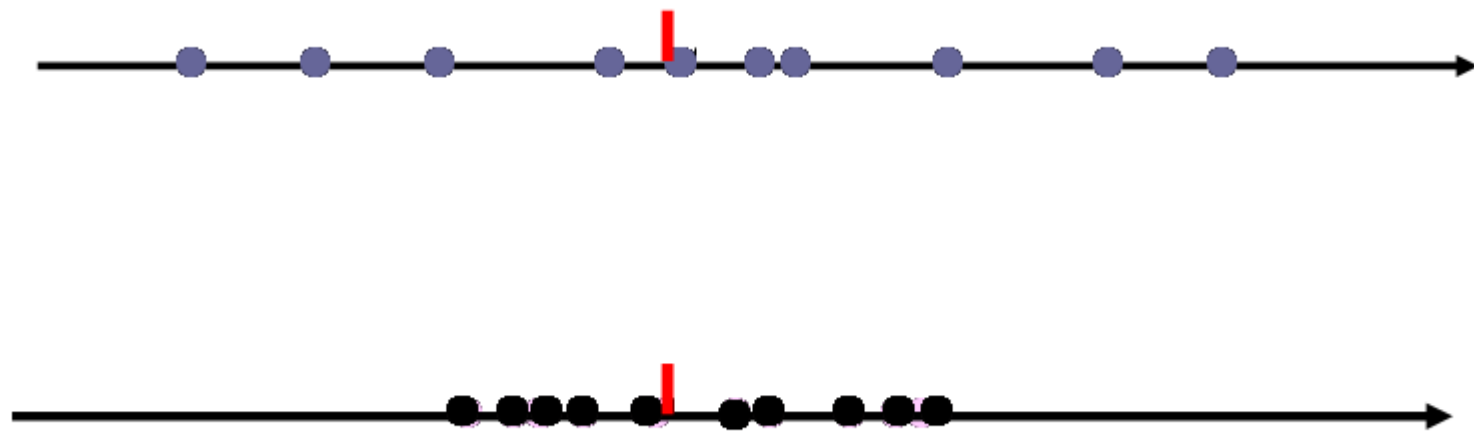
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

则 $E(\bar{X}) = \mu, E(S^2) = \sigma^2$.

例1 设总体 X 的 k 阶矩 $\mu_k = E(X^k)$ ($k \geq 1$) 存在, 又设 X_1, X_2, \dots, X_n 是 X 的一个样本, 试证明不论总体服从什么分布, k 阶样本矩 $A_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ 是 k 阶总体矩 μ_k 的无偏估计.

思考： 总体均值 μ 还有没有其他的无偏估计量？

(二) 有效性



设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量, 若有 $D(\hat{\theta}_1) \leq D(\hat{\theta}_2)$, 则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

(三) 相合性

若 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为参数 θ 的估计量,
若对于任意 $\theta \in \Theta$, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$
依概率收敛于 θ , 则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的相合估计量.

估计量的评价标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性

作业：

■ P175 9; 12; 14

■ 思考 13

第四节 区间估计

用空空导弹击落敌机的两种模式



1、导弹直接命中敌机将其击毁

要求精确估计敌机位置

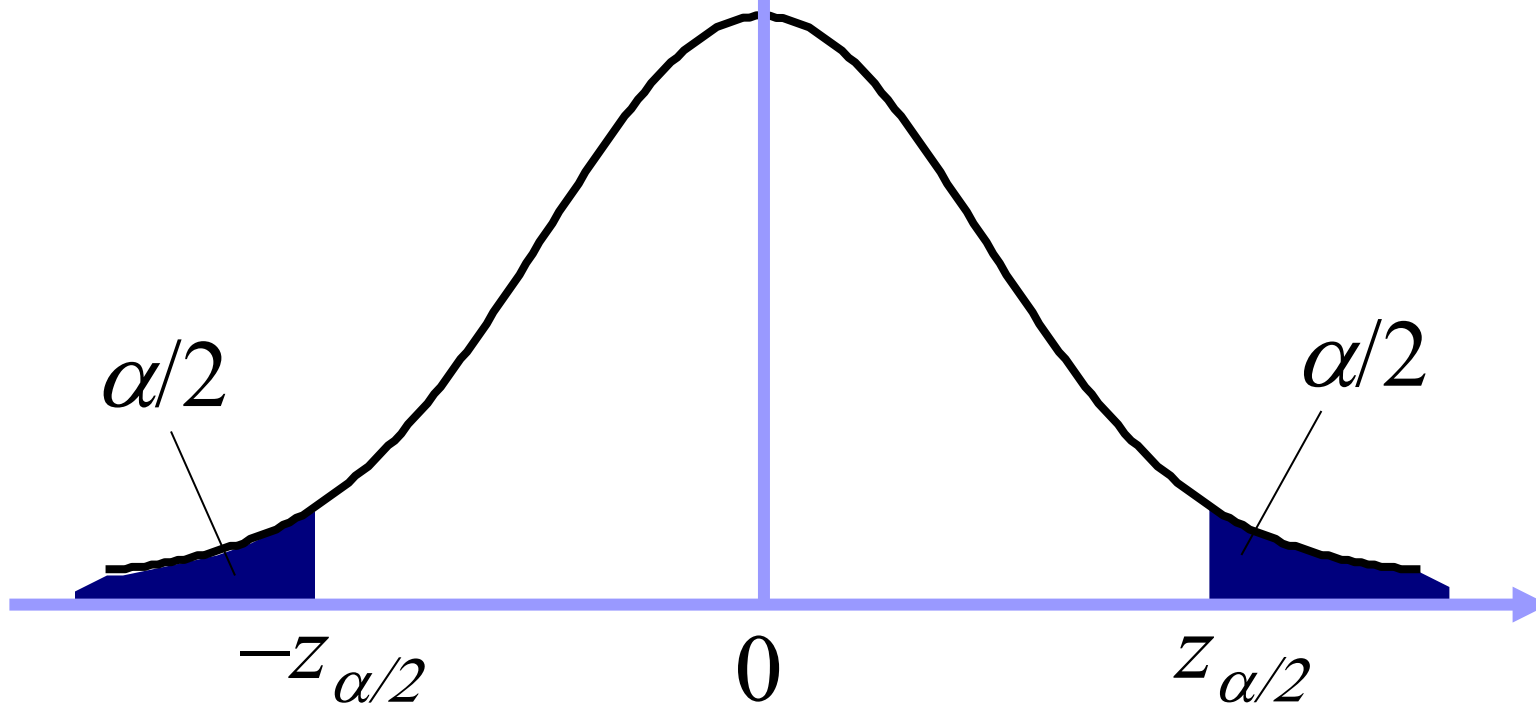
2、导弹接近敌机时引爆，依靠高速飞行的弹片将其击毁

不需要估计敌机精确位置，
只需要判断敌机范围，

例1 设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其中 σ^2 为已知, μ 为未知, 求 μ 的矩估计量.

解 $\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ 是不依赖于任何未知参数的,

由标准正态分布的上 α 分位点的定义知



$$P\left\{\left|\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} =$$

$$\text{即 } P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$$

1. 估计要尽量可靠，即区间包含 μ 的可能性很大，
2. 估计的精度要尽可能的高。如要求区间长度尽可能短。

可靠度与精度是一对矛盾，一般是在保证可靠度的条件下尽可能提高精度。

$$\text{即 } P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$$

1. 置信区间的定义

设总体 X 的分布函数 $F(x; q)$ 含有一个未知参数 q , 对于给定值 a ($0 < a < 1$), 若由样本 X_1, X_2, \dots, X_n 确定的两个统计量

$\underline{q} = \underline{q}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 和 $\bar{q} = \bar{q}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 满足

$$P\{\underline{q}(X_1, X_2, \dots, X_n) < q < \bar{q}(X_1, X_2, \dots, X_n)\} \geq 1 - a,$$

则称随机区间 (\underline{q}, \bar{q}) 是 q 的置信水平为 $1 - a$ 的置信区间, \underline{q} 和 \bar{q} 分别称为置信水平为 $1 - a$ 的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1 - a$ 称为置信水平.

$$\text{即 } P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$$

置信下限

置信上限

于是得 μ 的一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成 $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right).$

$$\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right).$$

取 $n = 16$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$,

得一个置信水平为 0.95 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96 \right)$

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\bar{x} = 5.20$,

则置信区间为 (5.20 ± 0.49) , 即 $(4.71, 5.69)$.

不是随机区间

$$P\left\{\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} < \mu < \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right\} = 1 - \alpha,$$

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等,都是 n)

每次可确定一个区间

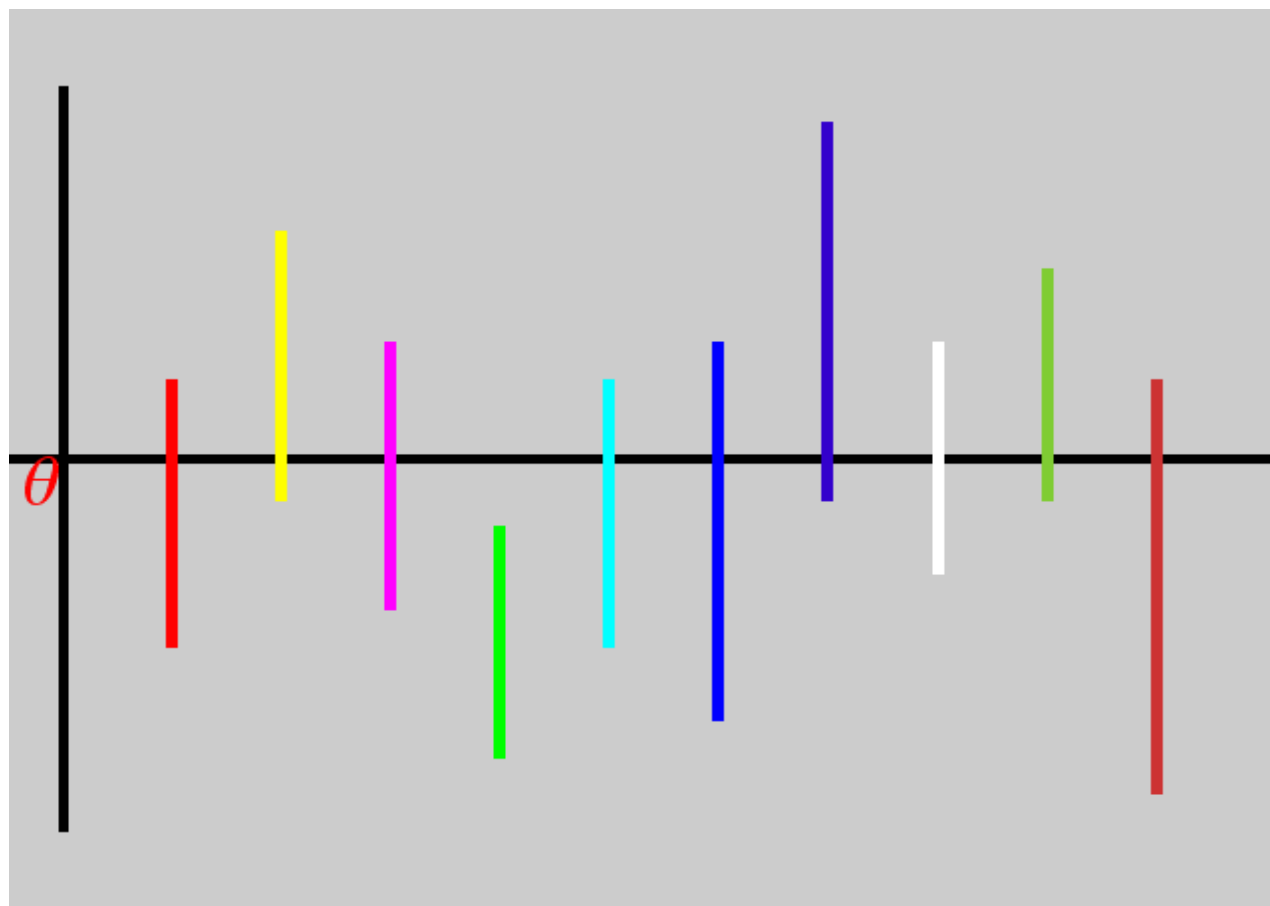
每个这样的区间要么包含 μ 的真值,

要么不包含 μ 的真值,

按**频率稳定于概率**,在这样多的区间中,

包含 μ 真值的约占 $(1-\alpha)$, 不包含 μ 的约占 α .

例如 若 $\alpha = 0.05$, 反复抽样 1000 次,
则得到的 1000 个区间中包含 μ 真值的约为 950 个.



求置信区间的一般步骤

- (1) 寻求一个样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的函数:

$$Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$$

其中仅包含待估参数 θ 并且 Z 的分布已知
且不依赖于任何未知参数.

枢轴量

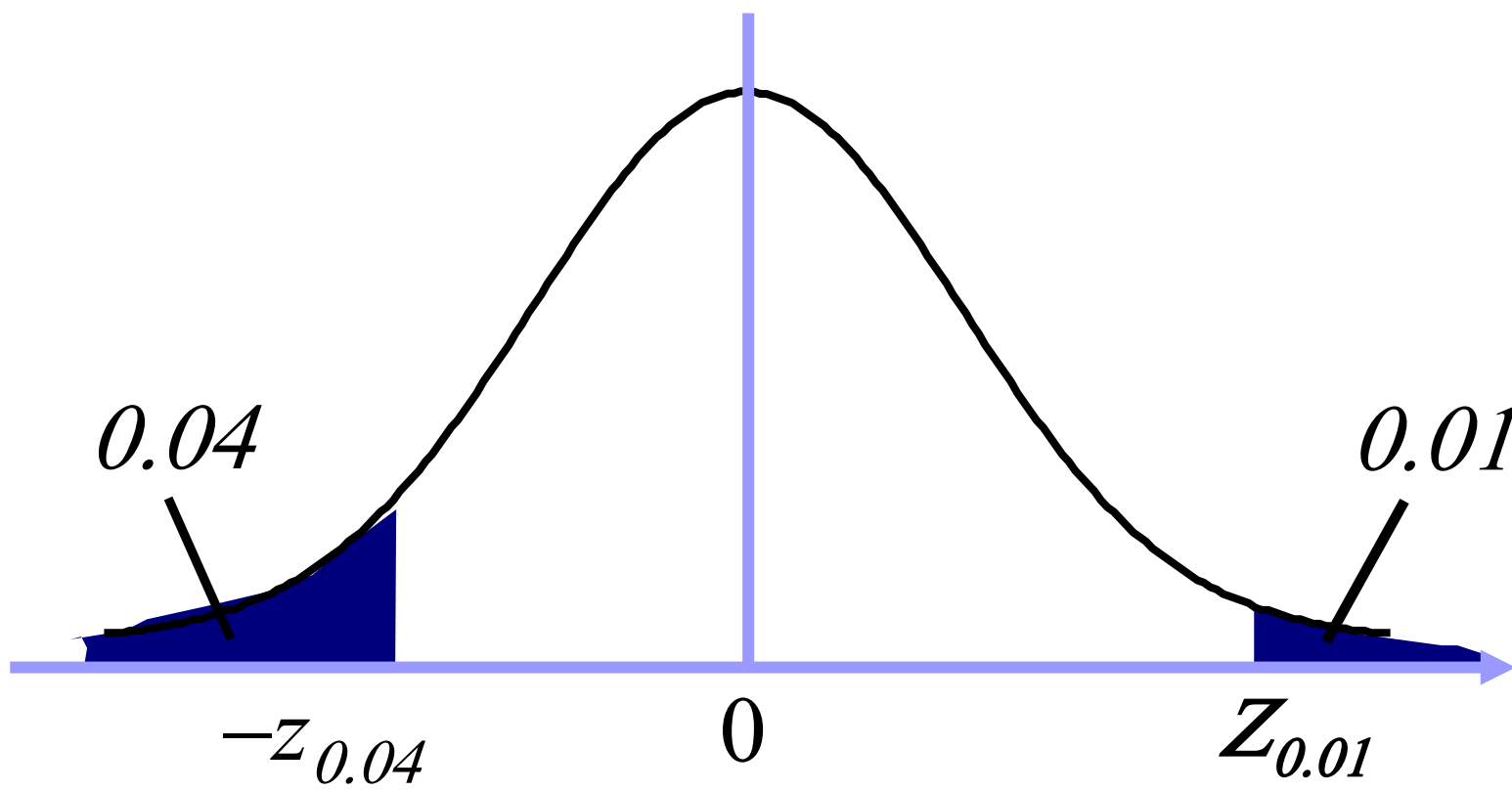
- (2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b ,
使 $P\{a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$.
- (3) 若能从 $a < Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的
不等式 $\underline{\theta} < \theta < \bar{\theta}$,

关于置信区间的构造有两点说明：

- 关键在于构造枢轴量，一般从 θ 的点估计出发。
- 满足置信度要求的 a 与 b 通常不唯一。

给定 $\alpha = 0.05$, 则又有 $P\left\{-z_{0.04} < \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95$,

故 $\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$ 也是 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.



比较两个置信区间的长度(长度短表示估计的精度高)

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} \right) L_1 = 2 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025} = 3.92 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04} \right) L_2 = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} (z_{0.04} + z_{0.01}) = 4.08 \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

显然 $L_1 < L_2$.

象 $N(0,1)$ 分布那样其概率密度的图形是单峰且对称的情况, 当 n 固定时, 以形如(4.5)那样的区间其长度为最短.

关于置信区间的构造有两点说明：

- 关键在于构造枢轴量，一般从 θ 的点估计出发。
- 满足置信度要求的 a 与 b 通常不唯一。若有可能，应选平均长度 $E(\theta \text{ 达到})$ 最短的 a 与 b 。这往往很难实现。

因此，常这样选择 a 与 b ，使得两个尾部概率各为 $\alpha/2$ ，即 $P(G < a) = P(G > b) = \alpha/2$ ，这样的置信区间称为等尾置信区间。

第五节 正态总体均值与方差的 区间估计

一、单个总体的情况

二、两个总体的情况

一、单个总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的情况

设给定置信水平为 $1-\alpha$, 并设 X_1, X_2, \dots, X_n 为总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, \bar{X}, S^2 分别是样本均值和样本方差.

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2 为已知,

μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$.

(2) σ^2 为未知,

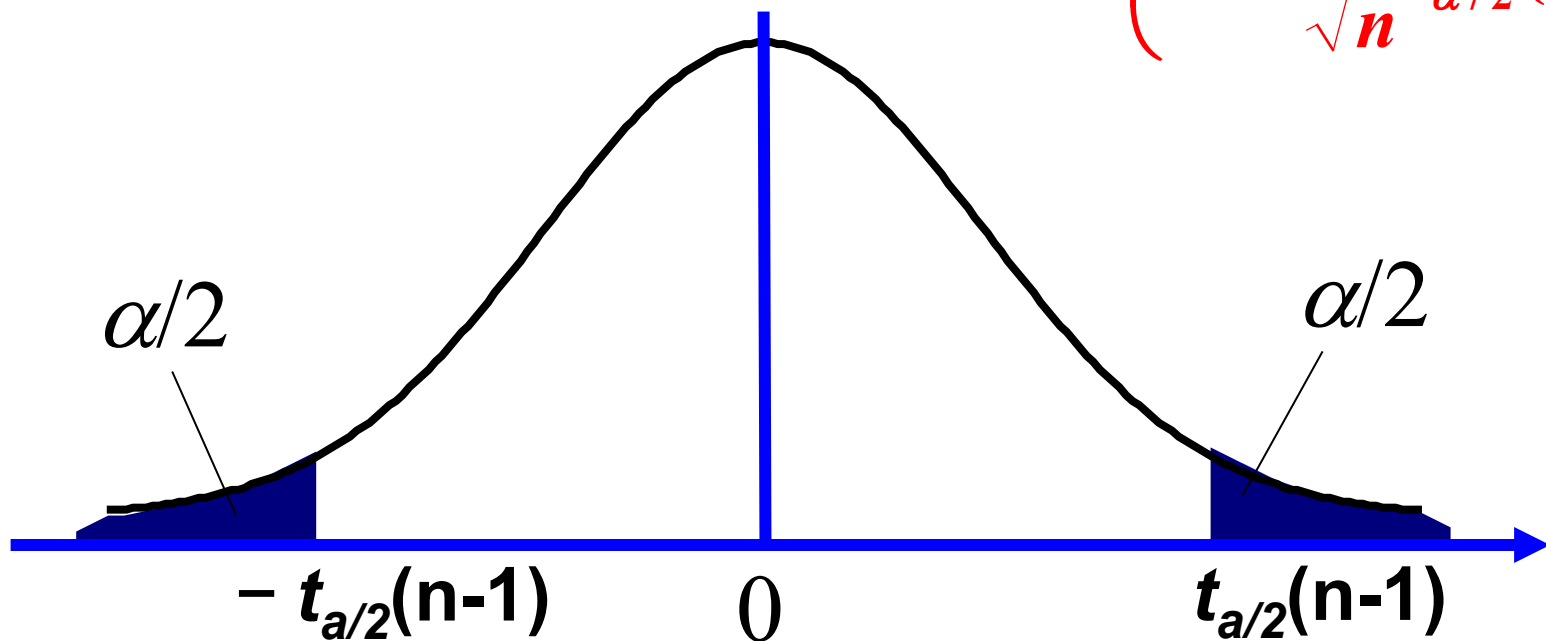
由于区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2} \right)$ 中含有未知参数 σ , 不能直接使用此区间,

又根据第六章定理三知 $\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

$$\text{则 } P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

$$\text{即 } P\left\{\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

于是得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\bar{X} \pm \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.



例2 有一大批糖果,现从中随机地取16袋,称得重量(克)如下:

506 508 499 503 504 510 497 512

514 505 493 496 506 502 509 496

设袋装糖果的重量服从正态分布,试求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解 $\alpha = 0.05, n - 1 = 15,$

查 $t(n-1)$ 分布表可知: $t_{0.025}(15) = 2.1315,$

计算得 $\bar{x} = 503.75, s = 6.2022,$

得 μ 的置信水平为 95% 的置信区间

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315 \right) \text{ 即 } (500.4, 507.1).$$

就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4克与507.1克之间, 这个估计的可信程度为95%.

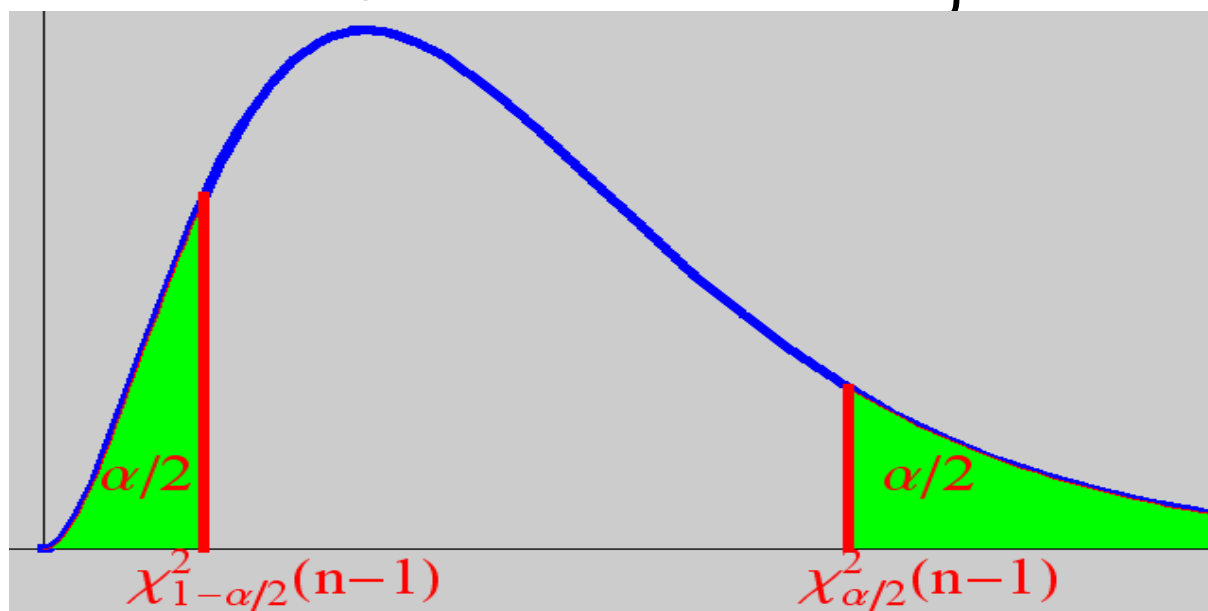
2. 方差 σ^2 的置信区间

根据实际需要, 只介绍 μ 未知的情况.

因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计,

根据第六章第二节定理二知 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

$$\text{则 } P\left\{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$



$$\text{则 } P\left\{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi_{\alpha/2}^2(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

$$\text{即 } P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}\right).$$

标准差 σ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_{\alpha/2}^2(n-1)}}, \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)}}\right).$$

例2 (续例1) 求例1中总体标准差 σ 的置信水平为0.95的置信区间.

解 $\frac{\alpha}{2} = 0.025, \quad 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975, \quad n - 1 = 15,$

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表可知:

$$\chi_{0.025}^2(15) = 27.488, \quad \chi_{0.975}^2(15) = 6.262,$$

计算得 $s = 6.2022,$

代入公式得标准差的置信区间 (4.58, 9.60).

二、两个总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的情况

设甲厂产品的某质量指标 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

设乙厂产品的某质量指标 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

为了比较产品质量指标，需要考虑

$\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 / \sigma_2^2$ 的统计推断问题。

二、两个总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的情况

设产品的某质量指标 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

由于原材料的改变、或设备条件发生变化、或技术革新等因素的影响，使得产品质量指标可能发生变化，此时产品的质量指标为 $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

为了了解产品质量指标有多大的变化，需要考虑 $\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 / \sigma_2^2$ 的统计推断问题

二、两个总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的情况

给定置信水平为 $1-\alpha$, 并设 X_1, X_2, \dots, X_{n_1} 为第一个总体 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$ 的样本, Y_1, Y_2, \dots, Y_{n_2} 为第二个总体 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 的样本, \bar{X}, \bar{Y} 分别是第一、二个总体的样本均值, S_1^2, S_2^2 分别是第一、二个总体的样本方差.

两个总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信区间（方差已知）

由 \bar{X}, \bar{Y} 的独立性及 $\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right), \bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$

可知 $\bar{X} - \bar{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right),$

或 $\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0, 1),$

于是得 $\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \right).$$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, 但 σ^2 为未知, (方差未知但相等)

$$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2),$$

$\mu_1 - \mu_2$ 的一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2) S_w \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} \right).$$

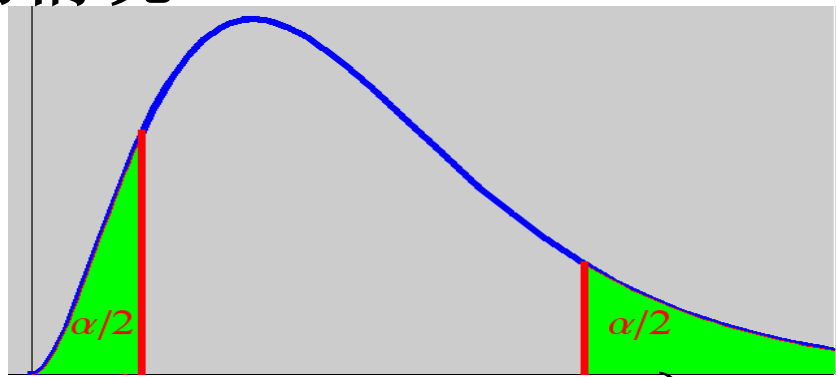
$$\text{其中 } S_w^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}, \quad S_w = \sqrt{S_w^2}.$$

例7 为比较I, II两种型号步枪子弹的枪口速度, 随机地取I型子弹10发, 得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500(\text{m/s})$, 标准差 $s_1 = 1.10(\text{m/s})$, 随机地取II型子弹20发, 得枪口速度平均值为 $\bar{x}_2 = 496(\text{m/s})$, 标准差 $s_2 = 1.20(\text{m/s})$, 假设两总体都可认为近似地服从正态分布, 且由生产过程可认为它们的方差相等, 求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信度为0.95的置信区间.

2. 两个总体方差比 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况.

$$\frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} \sim F(n_1 - 1, n_2 - 1),$$



$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1) < \frac{S_1^2 / \sigma_1^2}{S_2^2 / \sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)\right\} = 1 - \alpha$$

于是得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)}, \frac{S_1^2}{S_2^2} \frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1 - 1, n_2 - 1)} \right).$$

例9 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径, 随机抽取机器 A 生产的管子 18 只, 测得样本方差为 $s_1^2 = 0.34(\text{mm}^2)$; 抽取机器 B 生产的管子 13 只, 测得样本方差为 $s_2^2 = 0.29(\text{mm}^2)$. 设两样本相互独立, 且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2), N(\mu_2, \sigma_2^2), \mu_i, \sigma_i^2 (i = 1, 2)$ 均未知, 求方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为 0.90 的置信区间.

P175

- 作业: 16;18
- 思考: 19

第七节 单侧置信区间

一、问题的引入

二、基本概念

三、典型例题

四、小结

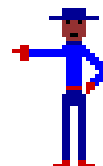
一、问题的引入

在以上各节的讨论中,对于未知参数 θ ,我们给出两个统计量 $\underline{\theta}, \bar{\theta}$, 得到 θ 的双侧置信区间 $(\underline{\theta}, \bar{\theta})$.

但在某些实际问题中,例如,对于设备、元件的寿命来说,平均寿命长是我们希望的,我们关心的是平均寿命 θ 的“下限”;与之相反,在考虑产品的废品率 p 时,我们常关心参数 p 的“上限”,这就引出了单侧置信区间的概念.

二、基本概念

1. 单侧置信区间的定义



对于给定值 α ($0 < \alpha < 1$), 若由样本 X_1, X_2, \dots, X_n 确定的统计量 $\underline{\theta} = \underline{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足

$$P\{\theta > \underline{\theta}\} \geq 1 - \alpha,$$

则称随机区间 $(\underline{\theta}, +\infty)$ 是 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间, $\underline{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限.

又如果统计量 $\bar{\theta} = \bar{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$, 对于任意 $\theta \in \Theta$ 满足 $P\{\theta < \bar{\theta}\} \geq 1 - \alpha$,
则称随机区间 $(-\infty, \bar{\theta})$ 是 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间, $\bar{\theta}$ 称为 θ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信上限.

2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

设正态总体 X 的均值是 μ , 方差是 σ^2 (均为未知),

X_1, X_2, \dots, X_n 是一个样本,

$$\text{由 } \frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t(n-1),$$

$$\text{有 } P\left\{\frac{\bar{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} < t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

$$\text{即 } P\left\{\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

$$\text{即 } P\left\{\mu > \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

于是得 μ 的一个置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1), +\infty\right),$$

μ 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的单侧置信下限

$$\underline{\mu} = \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\alpha}(n-1).$$

又根据 $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

$$\text{有 } P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi_{1-\alpha}^2(n-1)\right\} = 1 - \alpha,$$

$$\text{即 } P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right\} = 1 - \alpha,$$

$$\text{即 } P\left\{\sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\alpha}^2(n-1)}.$$

三、典型例题

例1 设从一批灯泡中, 随机地取5只作寿命试验, 测得寿命(以小时计)为 1050, 1100, 1120, 1250, 1280, 设灯泡寿命服从正态分布, 求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解 $1 - \alpha = 0.95$, $n = 5$, $\bar{x} = 1160$, $s^2 = 9950$,

$$t_{\alpha}(n-1) = t_{0.05}(4) = 2.1318,$$

μ 的置信水平为 0.95 的置信下限

$$\underline{\mu} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1) = 1065.$$



词语解释



枢轴

shūzhóu

1.机关运转的中轴。比喻中央权力机关或相位。

“枢轴”的含义应该是多个物体围绕着一个中心旋转的中心轴，如曲轴连杆机构的主轴可以称为“枢轴”，曲轴则不能称为“枢轴”。

唐刘肃《大唐新语·举贤》：“尝因夜卧，各言其志，处俊曰：‘愿秉枢轴一日足矣。’”

宋无名氏《儒林公议》卷上：“范仲淹入参宰政，富弼继秉枢轴，二人以天下之务为己任。”

明张居正《恭述祖德》诗：“愚臣备枢轴，理道惭无裨。”

2.喻中枢；中心。

章炳麟《馗书·订文》附《正名杂义》：“其切则裸举散字以为用，未尝一用字母部首，故枢轴繁乱而读不可知。”

鲁迅《中国小说史略》第二七篇：“包拯、颜查散而外，以他人为全书枢轴者，在先亦已尝有。”

枢轴

